

Úvod

V disciplínách, kde lze výkony sportovce objektivně měřit v metrech, kilogramech či sekundách, nebývá problém porovnat výkony sportovců. Horší je to např. u tenisu, krasobruslení nebo šachů. Tato sportovní odvětví se musela s problémem stanovení výkonnostních žebříčků vypořádat po svém. U šachů se nakonec prosadil tzv. ELO systém.

Jednoduše řečeno, ELO systém umožňuje stanovit **očekávaný** výsledek partie (nebo lépe série partií) mezi dvěma hráči na základě **rozdílů** jejich osobních ratingů. Přitom vůbec nezáleží na tom, zda se již vzájemně utkali. Tím ELO systém umožňuje pořadatelům dopředu stanovit sportovní úroveň turnajů, hráčům umožňuje odhadovat svoje šance před zahájením turnaje, kapitánům družstev je usnadněno rozhodování o sestavení jejich týmu.

Autorem ELO systému je prof. Arpád Elo, který v letech 1959-60 vypracoval ucelený hodnotící systém, založený na statistice a teorii pravděpodobnosti. Tento systém byl v roce 1970 přijat na kongresu FIDE v Siegenu za oficiální hodnotící systém.

Na počátku byly úzké světové špičky propůjčeny ELO ratingy. Další hráči získávali ELO rating již hrou (samozřejmě hrou s již ratingovanými hráči), a to podle vzorců, uvedených dále. Postupem času se ELO ratingy rozšířily z mezinárodní úrovně do jednotlivých národních federací. Po jisté počáteční nedůvěře se vztah hráčů k novému systému změnil a systém se stal nejen hodnotícím, ale i motivačním faktorem.

Periodická metoda

Mějme dva hráče. Jeden již ELO rating má, druhý ještě ne. Sehrají spolu zápas, a ten skončí nerozhodně. Pak je zřejmé, že onen dosud neratingovaný hráč tím, že získal 50% bodů, prokázal stejnou výkonnost jako jeho soupeř. Bude mu proto náležet takový ELO rating, jaký má jeho soupeř.

Obdobná situace nastane, když onen dosud neratingovaný hráč sehraje několik partií proti různým soupeřům, též s výsledkem 50% bodů. Pak si lze představit, že všechny partie sehrál proti jedinému fiktivnímu soupeři, jehož ELO rating je průměrem ratingů soupeřů skutečných. Takže náš dosud neratingovaný hráč bude mít ELO rovné průměru ELO ratingů soupeřů, proti kterým hrál.

A co když bude náš neratingovaný hráč hrát s jiným výsledkem než 50% bodů? Pak je situace složitější. Dosáhne-li například 75% bodů, byl zcela jistě silnější než je průměrný ELO rating soupeřů. Analogicky, kdyby dosáhl třeba 40% bodů, byl zřejmě slabší než průměrný ELO rating

soupeřů. Ale o kolik? Odpověď na tuto otázku dává následující tabulka:

P	D(P)	P	D(P)	P	D(P)	P	D(P)
		75	+193	50	0	25	-193
99	+677	74	+184	49	-7	24	-202
98	+589	73	+175	48	-14	23	-211
97	+538	72	+166	47	-21	22	-220
96	+501	71	+158	46	-29	21	-230
95	+470	70	+149	45	-36	20	-240
94	+444	69	+141	44	-43	19	-251
93	+422	68	+133	43	-50	18	-262
92	+401	67	+125	42	-57	17	-273
91	+383	66	+117	41	-65	16	-284
90	+368	65	+110	40	-72	15	-296
89	+351	64	+102	39	-80	14	-309
88	+336	63	+95	38	-87	13	-322
87	+322	62	+87	37	-95	12	-336
86	+309	61	+80	36	-102	11	-351
85	+296	60	+72	35	-110	10	-366
84	+284	59	+65	34	-117	9	-383
83	+273	58	+57	33	-125	8	-401
82	+262	57	+50	32	-133	7	-422
81	+251	56	+43	31	-141	6	-444
80	+240	55	+36	30	-149	5	-470
79	+230	54	+29	29	-158	4	-501
78	+220	53	+21	28	-166	3	-538
77	+211	52	+14	27	-175	2	-589
76	+202	51	+7	26	-184	1	-677

Tabulka 1: Rozdíly ELO ratingů

Sloupec P udává bodový zisk v procentech, sloupec $D(P)$ potom rozdíl ELO ratingů. Takže získá-li hráč např. 75% bodů, jeho výkonnost byla o +193 ELO bodů (viz tabulka 1.) větší než průměrné ELO jeho soupeřů. Pokud průměrné ELO soupeřů bylo řekněme 2105, pak první rating našeho modelového hráče bude $2105 + 193 = 2298$.

Tím se dostáváme k prvnímu pracovnímu vzorci ELO systému:

$$R_p = R_c + D(P) \quad (1)$$

kde R_p je výkonnost šachisty vyjádřená v ELO bodech, R_c je průměr ELO ratingů všech jeho soupeřů a $D(P)$ je oprava (kladná nebo záporná) podle procentuální úspěšnosti hráče.

V případě, že máme vypočítat výkonnost hráče v zápasu s jiným ratingovaným hráčem, užívá se poněkud pozměněná verze vzorce (1):

$$R_p = R_a + \frac{1}{2}D(P) \quad (2)$$

kde R_a je průměrný osobní koeficient obou účastníků zápasu.

Nyní ještě několik vysvětlujících poznámek:

- Označení P , $D(P)$ a všechna další jsou převzata z anglických originálů.
- Tabulka č. 1. je číselným vyjádřením jisté pravděpodobnostní funkce (kvantily¹ Normálního rozdělení pravděpodobnosti). To však znamená, že pokud hráč dosáhne necelého počtu procent P , tak hodnota $D(P)$ bude mezi odpovídajícími řádky tabulky. Tak např. pro hodnotu $P = 20.6\%$ bude $D(P) = -234$.
- V tabulce nejsou uvedeny hodnoty rozdílů ratingů pro 0% a 100%. Důvod je zcela pochopitelný. Hráč, který v turnaji všechny partie prohraje, je mnohem slabší než jeho soupeři. Ale o kolik slabší, to není možné říci. Lze odhadnout, že byl slabší nejméně o 750 bodů. Ale možná také o 1000 bodů nebo 1500 bodů. Stejná úvaha platí pro hráče, který v soutěži všechny partie vyhrál a mohl být takřka libovolně silnější než jeho soupeři.
- V tabulce jsou uvedeny pouze rozdíly ratingů. Nikde nejsou uvedena žádná absolutní čísla. Tím může být škála šachové výkonnosti libovolně posunuta, pouze jednotky výkonnosti musí být v celé stupnici stejné². Profesor Elo při volbě záchytných bodů zvolil³ pro silné amatéry či klubové hráče hodnotu 2000, pro

¹Normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti $N(\mu, \sigma)$ je charakterizováno hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Přitom platí, že $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Symbol μ značí střední hodnotu rozdělení a pro šachový ELO systém je $\mu = 0$. Symbol σ značí střední kvadratickou odchylku a pro šachový ELO systém je $\sigma = 200$. Písmeno e je samozřejmě Eulerovo číslo ($e \doteq 2.7182818$). Kvantil $D(P)$ je dán rovnicí

$$\int_{-\infty}^{D(P)} f(x) dx = \frac{P}{100}$$

Tuto rovnici nelze řešit analyticky, nutný je numerický výpočet na počítači. Pro různá $P \in \{1, 2, \dots, 99\}$ počítáme $D(P)$ a výsledkem je tabulka č. 1., jejíž používání je mnohem praktičtější.

Zvídavějšího čtenáře by mohlo ještě zajímat, proč pro ELO systém bylo vybráno právě Normální rozdělení. Je tomu tak proto, že Normální rozdělení má mezi všemi rozděleními pravděpodobnosti výsadní postavení. Platí totiž Centrální limitní teorém (CLT), což je matematická věta s důkazem, že (laicky řečeno) ať mají náhodné vlivy (veličiny) jakékoliv rozdělení (a vlivem pro šachistu může být cokoliv, např. denní doba, únava, neklid v sále, ...), tak bude-li těchto vlivů mnoho, tak náhodná veličina vytvořená součtem těchto vlivů (náhodných veličin) má Normální rozdělení.

²Třeba teplotu je možné měřit nejen ve stupních Celsia, ale i v Kelvinech. Obě stupnice mají jednotky o stejné velikosti, pouze počáteční (nulový) bod je posunut.

³Celsius zvolil jako záchytné body pro svoji teplotní stup-

kandidáty na titul mistra světa pak hodnotu 2600.

- Způsob výpočtu ELO ratingu, který je založen na tabulce č. 1. a na vzorci (1) se říká **periodická metoda**. Periodická proto, že ELO je přepočítáno vždy po nějaké periodě - třeba každý půlrok nebo každých 18 partií - a při tomto přepočtu se vůbec nebere ohled na stávající rating hráče (tj. výpočet probíhá vždy tak, jako kdybychom pro hráče počítali jeho první rating). Tento způsob výpočtu je používán např. v britské šachové federaci. U nás v ČR je používán (kromě výpočtu prvních ratingů) pro hráče do 18 let (tedy takovému mladému hráči je ELO vypočítáváno vždy znovu a to z posledních 18 partií). Důvodem je to, že mladým hráčům se mění výkonnost mnohem dynamičtěji než ostatním skupinám hráčů, a vzorce průběžné metody (viz dále) by takové změny výkonnosti podchytily až po velkém počtu partií.
- První ELO rating hráče je možné vypočítat až po jistém (pevně stanoveném) počtu partií. Přitom čím bude partií více, tím bude ELO rating hráče stanoven přesněji. Jde totiž o to, že hráči nehrají vždy přesně na úrovni svého ELO (hráči nejsou stroje), a každý půlbod náhodně získaný či ztracený má tím větší dopad na ELO rating, čím méně je partií. Následující tabulka udává, jak rychle narůstá nejistota v určení ELO ratingu se snižujícím se počtem partií:

počet partií	možná velikost chyby
30	±35 ELO bodů
20	±42 ELO bodů
15	±49 ELO bodů
9	±64 ELO bodů
5	±85 ELO bodů

V ČR je hráči spočítán první ELO rating po odehrání 18 partií, ve FIDE dokonce po odehrání pouhých 9 partií. Z výše uvedené tabulky je vidět, že přesnost prvního ratingu není nijak oslňující. Je to ale nutný kompromis mezi zájmem hráčů být co nejdříve (tj. po co nejmenším počtu partií) uvedeni na ELO listině a mezi požadavkem, aby vypočítaný osobní rating byl co možná nejpresnějším vyjádřením síly hráče.

nici bod tání a bod varu vody (za normálního atmosférického tlaku).

Očekávaný počet bodů

Dříve než přejdeme k výkladu tzv. Průběžné metody výpočtu ELO ratingu, je nutné vysvětlit pojem *očekávaný počet bodů* (označuje se W_e). Je to takový počet bodů, který hráč potřebuje dosáhnout v turnaji, aby jeho ELO rating zůstal zachován. Získá-li více bodů, jeho osobní rating vzroste, získá-li méně bodů, jeho osobní rating poklesne. Pro výpočet W_e lze použít dvě metody:

1. Určíme rozdíl mezi ratingem našeho hráče a průměrným ratingem všech jeho soupeřů. Tento rozdíl považujeme za $D(P)$ a z tabulky č. 1. zjistíme P , což bude očekávaný procentní zisk. Potom

$$W_e = \frac{P \cdot N}{100} \quad (3)$$

kde N je počet soupeřů našeho hráče (a tedy i počet partií, ze kterých by měl získat W_e bodů).

Příklad: Hráč má ELO 2680 bodů. V turnaji na 13 kol má hrát proti soupeřům (všichni mají ELO rating), jejichž průměrný rating je 2595. Jaký je očekávaný počet bodů W_e pro našeho hráče? Nejprve spočítáme rozdíl mezi ratingem našeho hráče a průměrným ratingem všech jeho soupeřů: $2680 - 2595 = +85$. Poté v tabulce č. 1. k hodnotě $D(P) = +85$ nalezneme odpovídající hodnotu P : v našem případě $P \doteq 61.7\%$ (všimněme si: hráčův rating je vyšší než průměrný rating jeho soupeřů, musí tedy získat nadpoloviční počet bodů). Potom již ze vzorce (3) dostáváme $W_e = \frac{61.7 \times 13}{100} = 8.02$ bodu.

2. Druhá metoda je pracnější. Nejdříve si spočítáme očekávané výsledky proti jednotlivým hráčům (označme je P_1, P_2, \dots). Např. pokud první soupeř má ELO rating 2600, tak rozdíl ELO ratingů je +80 (nás hráč má ELO 2680) a proto $P_1 = 0.61$. Obdobně počítáme P_2, P_3, \dots . Nakonec všechny očekávané výsledky (proti jednotlivým soupeřům) sečteme

$$W_e = \sum_{i=1}^N P_i \quad (4)$$

V ideálním případě by obě výše popsané metody měly vést ke stejné hodnotě W_e . Případné drobné rozdíly jsou způsobeny zaokrouhlovacími chybami.

Průběžná metoda

Průběžná metoda umožňuje vypočítat nový osobní rating pro hráče, který již byl dříve ratingován.

$$R_n = R_o + K \cdot (W - W_e) \quad (5)$$

Význam symbolů je následující:

R_n	...	nový ELO rating hráče
R_o	...	původní ELO rating hráče
K	...	koeficient rozvoje
W	...	dosážený počet bodů
W_e	...	očekávaný počet bodů

V tomto vzorci jsou zachyceny všechny dosavadní výsledky hráče. Nově započítávané výsledky jsou ve druhém sčítanci vztahu (5), zatímco dřívější výsledky jsou "zakonzervovány" v původním ELO ratingu R_o .

Nyní si objasníme, co je to koeficient rozvoje K . Je to vlastně počet ELO bodů, které hráč získá za každý bod navíc oproti očekávanému výsledku W_e . Pokud hráč pro změnu nedosáhl očekávaného výsledku W_e , bude ELO body ztrácet. Čím větší je hodnota K , tím větší vliv v novém ratingu R_n mají nově započítávané výsledky. Při nižší hodnotě K je naopak kladen větší důraz na minulé výkony, jež jsou obsaženy v původním ratingu R_o .

V praxi jsou používány hodnoty K v rozmezí 10 až 32. Nižší hodnota $K = 10$ je používána ve FIDE, kde se předpokládá, že výkony hráčů jsou již stabilizované. U nás v ČR je pro národní ELO používán - u hráčů starších než 20 let - koeficient rozvoje $K = 15$. U hráčů ve věku 18-20 let je používána hodnota $K = 20$, neboť se předpokládá u této věkové skupiny větší změny ve výkonnosti. Hráčům mladším než 18 let a hráčům bez ELO ratingu není ELO počítáno podle vzorce (5) průběžné metody, ale podle vzorce (1) periodické metody.

Nyní si výpočet nového ELO ratingu podle vzorce (5) ukážeme na konkrétním příkladu. Hráč má ELO 2680 bodů. V turnaji na 13 kol hrál proti soupeřům, jejichž průměrný rating byl 2595. V předcházející kapitole jsme spočítali, že by měl dosáhnout $W_e = 8.02$ bodu. Řekněme, že dosáhl 9 bodů. Jeho nový ELO rating proto bude $R_n = R_o + K \cdot (W - W_e) = 2680 + 10 \cdot (9 - 8.02) \doteq 2690$. Při výpočtu jsme pro koeficient rozvoje použili hodnotu $K = 10$, protože se jednalo o velmistrovský turnaj na mezinárodní úrovni (FIDE).

Různá administrativní opatření

- Jak již bylo uvedeno v předcházejících kapitolách, první ELO rating se počítá podle vzorce (1), další změny ELO ratingu se již počítají podle vzorce (5). Přesto je tu jedna výjimka. Pokud hráč ve sledovaném období

(období od posledního výpočtu ELO ratingu - v ČR $\frac{1}{2}$ roku) sehraje 41 nebo více partií, nebude na jeho současný rating brán zřetel a nový rating bude vypočítán znovu podle vzorce (1).

- V případě, že se hráč účastní turnaje s mnohem slabšími soupeři, musel by pro zachování svého ratingu získat třeba 80% či 90% bodů. To by bylo příliš tvrdé. Proto bylo ustanoveno, že takovému hráči stačí pro zachování vlastního ELO ratingu turnaj vyhrát, nebo alespoň dosáhnout stejně bodů jako vítěz turnaje.
- ELO systém není bohužel úplně dokonalý. Dá se matematicky dokázat, že při hře se soupeři o 400 a více ELO bodů slabšími dochází (po započítání dalších výsledů) ke ztrátě osobního ratingu i v případě výher! Proto je umožněno nechat si vítěznou partii vyškrtnout. Samozřejmě vyškrtnutí vítězné partie má význam pouze tehdy, je-li mezi hráči rozdíl větší než 400 ELO bodů. O toto vyškrtnutí vítězné partie musí hráč před výpočtem nového ratingu požádat.

Uzavřený turnaj a ELO

Až dosud jsme uvažovali, že pro výpočet ELO ratingu hráče se berou v potaz jen partie proti ratingovaným soupeřům (a samozřejmě se musí jednat o partie řádně sehrané, kontumační výhry ani prohry se nepočítají). V turnajích hraných švýcarským systémem nebo v soutěžích družstev tomu tak skutečně je. Ale ne v turnajích hraných systémem každý s každým (dále jen uzavřený turnaj). Tam stačí, aby 3 účastníci (z např. deseti) měli ELO rating a pro výpočet ELO se **všem** hráčům počítá **všech** devět partií! Tato část výkladu teorie rating systému bývá pokládána za nejobtížnější. Vše si ukážeme na příkladu.

Mějme uzavřený turnaj o deseti účastnících, kde pouze tři hráči mají ELO rating. Jejich ratingy necht' jsou 2400, 2320 a 2270 ELO bodů a v soutěži docílili postupně 7, 5.5 a 4 body. Nejprve vypočítáme průměrný koeficient celého turnaje. Ten je dán vzorcem

$$R_a = R_z - \frac{N-1}{N} \cdot \frac{\sum_{i=1}^M D(P_i)}{M} \quad (6)$$

kde

R_a	...	průměrný koeficient turnaje
R_z	...	průměrné ELO ratingovaných hráčů
N	...	počet hráčů v turnaji
M	...	počet ratingovaných hráčů

$\sum_{i=1}^M D(P_i)$ součet rozdílů ratingů všech hráčů s ELO

Vzorec je jednodušší, než se na první pohled zdá. Zlomek $\frac{N-1}{N}$, který se v rovnici (6) vyskytuje, je matematický způsob vyjádření okolnosti, že v turnaji má každý hráč poněkud jiné soupeře, protože všichni hrají s ním, ale on sám se sebou hrát nemůže. V našem příkladu je $N = 10$ a $M = 3$. R_z je průměrné ELO ratingovaných hráčů, v našem příkladu $R_z = \frac{2400+2320+2270}{3} = 2330$.

Nyní budeme počítat $\sum_{i=1}^M D(P_i)$. První hráč dosáhl 7 bodů z 9 partií, to je 77.8% a podle tabulky č. 1. je $D(P_1) = +218$. Druhý hráč dosáhl 5.5 bodu z 9 partií, to je 61.1% a $D(P_2) = +80$. Třetí hráč dosáhl 4 body z 9 partií, to je 44.4% a $D(P_3) = -40$. Proto $\sum_{i=1}^3 D(P_i) = 218+80-40 = 258$.

Po dosazení do vzorce (6) dostáváme $R_a = 2330 - \frac{9}{10} \cdot \frac{258}{3} = 2253$. Hledaný koeficient turnaje je tedy $R_a = 2253$.

Pokud již známe průměrný koeficient turnaje, můžeme se zajímat o výkonnost jednotlivých hráčů v tomto turnaji. Pro tento účel se nepoužívá (pro uzavřené turnaje) vzorec (1), ale (poněkud upravený) následující vzorec:

$$D_a(P) = D(P) \cdot \frac{N-1}{N} \quad (7)$$

Veličinu $D_a(P)$ nazýváme *upravená výkonnostní korekce*. Výkonnost šachisty v turnaji je potom

$$R_p = R_a + D_a(P) \quad (8)$$

Konkrétní příklad: Necht' ve výše popsaném turnaji startoval hráč D (bez ELO ratingu) a dosáhl 3 body z 9 partií. Jakou výkonnost prokázal v tomto turnaji? Dosažené 3 body z 9 partií znamenají 33.3%, což podle tabulky č. 1. odpovídá $D(P) = -122$. Po dosazení do (7) dostaneme $D_a(P) = -122 \cdot \frac{9}{10} = -110$. Po dalším dosazení do (8) dostáváme $R_p = R_a + D_a(P) = 2253 - 110 = 2143$. Tedy hráč D prokázal (v tomto turnaji!) výkonnost 2143 ELO bodů. Pro výpočet (jeho prvního) ELO ratingu mu bude započítáno všech devět partií, pokud byly řádně sehrány (kontumace se nepočítají). ELO rating samozřejmě hráč D získá až po odehrání předepsaného počtu partií (v ČR 18 partií).

■